



O Cálculo Mental e as estratégias utilizadas nos cálculos de adição e subtração

Cristiane Raquel Kern¹

Isabel Koltermann Battisti²

Resumo

Cotidianamente nos deparamos com situações que necessitam usar cálculos para serem resolvidas. Muitos destes tendo de ser realizados mentalmente necessitando explorarmos diversas estratégias para se chegar facilmente a uma resolução. Tendo em mente as diversas possibilidades de resolver operações, se percebe, enquanto futura professora de matemática, uma necessidade de identificar estratégias utilizadas por pessoas ao realizarem o cálculo mental, pois no dia-a-dia notamos uma menor e uma maior facilidade com que as pessoas calculam mentalmente estabelecendo relações mentais de acordo com suas habilidades e estratégias. Através desta pesquisa procuro trazer as diferentes estratégias utilizadas por indivíduos escolarizados e não escolarizados em cálculos de adição e subtração que foi realizada através de uma entrevista na qual solicitou-se para que estes calculassem mentalmente quatro operações. Conclui-se que há várias estratégias utilizadas sendo que muitas delas facilitam a resolução do cálculo.

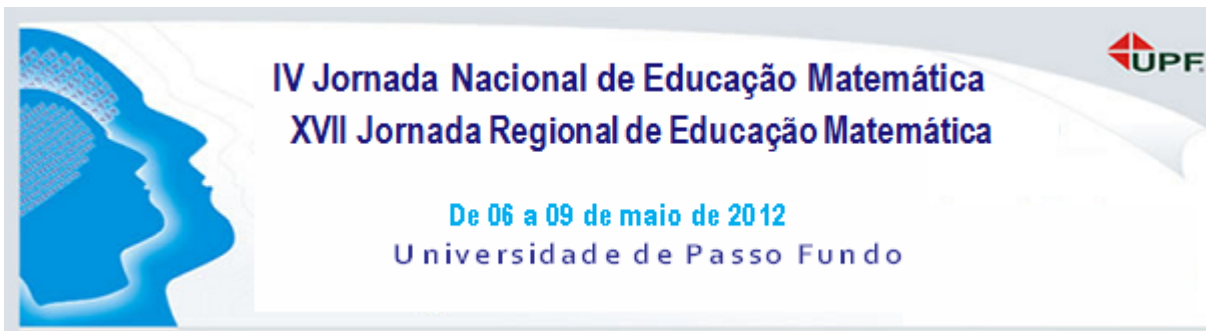
Introdução

Atualmente a resolução de problema tem se mostrado como uma metodologia eficaz ao ensinar matemática. Resolver um problema implica em pensar em estratégias e cálculos, é preciso raciocinar, analisar a operação a ser resolvida. É preciso escolher um procedimento apropriado que possibilite a resolução. Estes processos de resolução, normalmente, em sala de aula, se estabelecem somente na forma escrita, muitas vezes limitando os alunos a apenas um procedimento. Poucas são as vezes que professores exploram a utilização do cálculo mental, ou até mesmo a explicitação pelo aluno de suas estratégias de resolução para um determinado problema ou cálculo.

Cada vez mais pesquisadores reforçam a idéia de que a disciplina de Matemática na Educação Básica não pode ser reduzida a um conjunto de procedimentos mecânicos e

¹ Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Licenciada em Matemática. cristianekern@iei.org.br

² Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Mestre. Isabel.battisti@unijui.edu.br



repetitivos. Neste contexto, é importante explorar as diferentes formas de resolução para que os alunos tenham a possibilidade de selecionar as estratégias que melhor lhes convém, e desenvolver assim a autonomia. Acredita-se que a prática com o cálculo mental permite construir o raciocínio lógico, desenvolver habilidades como a atenção, a memória e a concentração, ampliar o repertório de cálculo e agilizar a resolução de um problema.

O uso da memória é um ponto importante do cálculo mental, explorando formas diferentes, rápidas e que realmente foram entendidas pelos alunos/pessoas, ou seja, explorar caminhos próprios para se chegar ao resultado esperado. Desta forma, podendo utilizar estimativas, decomposição, arredondamento, aproximação.

Podemos notar que em muitas situações vivenciadas no dia-a-dia utilizamos estimativas, arredondamentos ou aproximações. Quando vamos ao supermercado com certa quantia de dinheiro, precisamos ter uma previsão, fazer uma estimativa do total dos valores dos produtos a serem comprados. Passamos por diversas situações como estas, e nestas condições, não tendo acesso ao lápis e papel ou calculadora, o cálculo mental é uma ferramenta extremamente eficaz. Ao realizar este tipo de exercício em nosso dia-a-dia, construímos estratégias para a resolução de diferentes problemas e cálculos. Além disso, muitas vezes sem perceber, fazemos uso de diversas técnicas do algoritmo das operações elementares da matemática.

Diante de várias situações como estas e fundamentada na pesquisa realizada por Kern (2011) no Componente Curricular Prática de Ensino s/f de Estágio Supervisionado V: Trabalho de Sistematização de Curso em Matemática, do curso de Matemática – Licenciatura, buscamos aprofundar/ampliar a pesquisa já realizada, analisando as estratégias utilizadas por indivíduos entrevistados no desenvolvimento dos cálculos de adição e subtração. Ou seja, observando as diferentes formas de resolução de problemas envolvendo cálculos trazemos o seguinte questionamento: quais as estratégias utilizadas nos cálculos de adição e subtração ao serem resolvidos na forma mental?

Procedimentos Metodológicos



A pesquisa a qual embasa o presente artigo se configura como qualitativa com enfoque descritivo, na qual estuda um caso. Neste estudo são utilizados dados empíricos, tabelas dos procedimentos dos cálculos de adição e subtração entrevista, produzidos por Kern (2011).

Nesta produção dos dados, Kern traz para cada uma das operações cinco sujeitos considerados escolarizados e cinco sujeitos não escolarizados. Para estes foi falado o cálculo, e solicitado pela pesquisadora que pensassem na resposta, para então responder oralmente a resposta e explicitar o procedimento utilizado em seu cálculo. No desenvolvimento do cálculo, os sujeitos envolvidos não utilizaram papel, lápis ou algum material de apoio, apenas foram utilizadas estratégias pensadas, ou seja, foram realizados cálculos mentais.

As diferentes estratégias foram analisadas com base nos procedimentos utilizados, considerando a relação com a estrutura do número, à sua composição e decomposição, tendo assim dados para uma análise mais aprofundada dos meios de ensino. Pois, “o cálculo mental se vale de truques, como a alteração de parcelas ou fatores e a devida compensação no resultado” (MORES e CAETANO, 2008, p.3).

Os procedimentos utilizados por cada entrevistado foram analisados individualmente, mas agrupando conforme as estratégias utilizadas. Assim, temos um comparativo dos entrevistados percebendo a forma de pensamento implícita nos dois grupos de sujeitos, escolarizados e não escolarizados, se estas são distintas e se possuem um padrão matemático.

Esta pesquisa terá como principais referenciais teóricos Parra (1996) a qual trás um estudo sobre o cálculo mental na escola primária, Van De Walle (2009), Lopes e Gimenez (2009), pois estes trabalham reflexões psicopedagógicas na área da matemática, analisando o cálculo mental na resolução de problemas e questionando a importância de se trabalhar o cálculo mental em sala de aula.

As estratégias utilizadas nas operações de Adição

O cálculo mental pode ser realizado de diferentes formas e com o tempo e uso facilita as estratégias de cálculo, pois é, de certa forma compreendido o algoritmo fazendo-se uso de regras padronizadas.



As estratégias utilizadas em cálculos de adição são várias, tendo como principais procedimentos: a decomposição do número, propriedade associativa, busca do complemento, arredondamento, compensação.

Pode-se visualizar o uso de algumas estratégias analisando as tabelas a seguir. Nestas fez-se uso das estratégias de cada entrevistado, mostrando a forma como proceder o cálculo nas operações de adição.

Operações		N1	N2	N3	N4	N5
Adição	1250+45	<p>Iniciou o cálculo somando as unidades: $0+5$ obteve 5. Somou as dezenas: $5+4=9$. Percebeu na soma das centenas tinha apenas o 2, e da mesma forma no valor posicional da unidade de milhar. Pensou devagar lembrando dos resultados,</p>	<p>Tem dificuldade em calcular e inicia somando nos dedos o seguinte: $50+45$. Para esta, soma $40+40=80$ e então $80+10$ encontrando 90. Sabe que precisa somar ainda com o 5. Logo resulta em 1295, e sabe que a centena e a dezena não somarão com número diferente de zero.</p>	<p>Realiza a soma $50+45$ e diz que resulta em 95. Junta com o restante pois sabe que o 1 e o 2 nas suas posições não somarão com outro número.</p>	<p>Calcula a soma $50+45$ iniciando a soma pelas unidades: $5+0=5$. Logo soma as dezenas: $4+9$ e automaticamente e junta com o restante dos números.</p>	<p>Somou $5+4$ e o resultado juntou com o 5 e depois com o restante.</p>



IV Jornada Nacional de Educação Matemática XVII Jornada Regional de Educação Matemática



De 06 a 09 de maio de 2012
Universidade de Passo Fundo

		juntou-os, de acordo com seu valor posicional.				
	2457+778	Calcula iniciando a soma $8+7=15$, fala que "vai 1" somando com o 7 e o 5: $7+5=12+1=13$, da mesma forma acontece com a centena $7+4=11+1=12$	Calcula visualizando o cálculo. Inicia somando as unidades: $7+8=15$ fala que "vai 1" para a dezena $5+7=12+1=13$, da mesma forma com as centenas $4+7=11+1=12$ $2+1$ é 3 → 3235	Soma separando os números de acordo com o valor posicional: Unidade: $7+8$ Dezena: $5+7+1$ Centena: $4+7+1$ Unidade de Milhar: $1+2$ 3235	Tendo em mente a operação formal, calcula somando as unidades: $7+8$ são 15. Então as dezenas: $5+7=12+1=13$ E as centenas: $4+7=11+1=12$ 3235	Pensando na forma de armar a operação, segue os passos da operação formal: $7+8=15$ $5+7=12+1=13$ $4+7=11+12$ $2+1=3$

Tabela 1: Estratégias desenvolvidas pelos entrevistados não escolarizados nos cálculos de adição.
Fonte: Kern (2011).

Operações		E1	E2	E3	E4	E5
Adição	1250+45	Somou diretamente os valores das dezenas: $5+4=9$ e depois este resultado com 1200 que restou da soma anterior.	Pensou na soma $50+45$ e iniciou realizando o cálculo da mesma forma que o cálculo formal. $5+0=5$ e $4+5=9$. Finalizando juntou com o 1 e o 2, 1295.	Notou que precisaria calcular apenas $50+45$ iniciando esta soma como na operação formal: $5+0=5$ e $4+5=9$, juntando com o restante.	Pensa apenas na soma $50+45$ calculando da unidade para a dezena. Fala que a "Centena e milhar não muda, só muda a dezena"	Percebeu logo que teria de somar apenas $4+5=9$ e disse que o restante ele junta, resultando em 1295.
	2457+778	Seu raciocínio segue a operação formal,	Utilizando a decomposição: $2000+400+50+7$ e $700+70+8$, calcula	Se baseando no algoritmo convencional, realiza o cálculo	Realiza a decomposição dos números: $2400+57$ e $700+78$ e	Inicia o cálculo somando as unidades: $8+7=15$,



		iniciando pelas unidades: 7+8, seguindo para a dezena: 5+7, centena: 4+7 E milhar: 2+1	$400+700=1100$ $50+70=120$ Soma os resultados encontrados $1100+120=1220$, depois $7+8=15$ então $1220+15=1235$ $+2000$	somando as unidades: 7+8, passa para as dezenas: 5+7+1, para as centenas: 4+7+1 e logo fala que resulta em 3235.	calcula da seguinte forma: $2400+700$ e $57+78$ e em seguida soma os resultados: $3100+135$ 3235	depois soma as dezenas: $7+5+1=13$, centenas: $4+7+1=12$ e então o milhar. $2+1=3$
--	--	----------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

Tabela 2: Estratégias desenvolvidas pelos entrevistados escolarizados nos cálculos de adição.
 Fonte: Kern (2011).

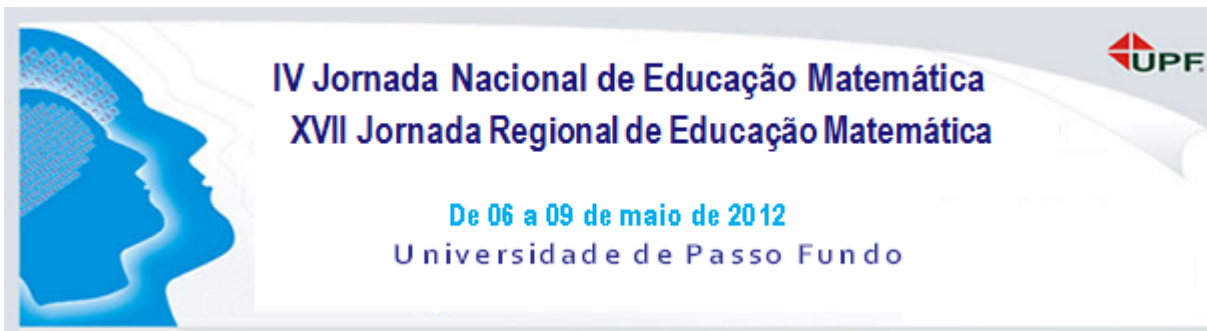
No grupo dos sujeitos não escolarizados é muito comum a utilização do algoritmo formal na resolução dos cálculos propostos. Para a maioria dos sujeitos a realização da soma separando os números de acordo com o valor posicional é a primeira forma que vem em mente, pois foi esta a mais utilizada na escolarização destes sujeitos e, talvez a única forma. Os sujeitos que utilizaram esta forma de resolução acharam complicado para lembrar os resultados dos passos realizados nos cálculos.

Percebe-se que sujeitos considerados escolarizados tem mais facilidade na resolução dos cálculos utilizando estratégias. Estratégias estas formadas pela escolarização e entendidas de forma a facilitar o cálculo pensado.

Os sujeitos que estão mais familiarizados com os números conseguem obter estratégias de cálculos diferenciadas daquelas utilizadas no cálculo realizado no papel, considerado algoritmo tradicional.

A estratégia utilizada muito bem nestas operações foi a decomposição dos números, facilitando a soma dos números nas diferentes casas decimais, ou seja, realizada a adição do milhar, adição das centenas, adição das dezenas, adição das unidades e então combinar os resultados.

Pode-se notar a utilização da decomposição de mais de uma maneira: na soma $50+45$ do cálculo $1250+45$, calculando $40+40=80$. A este adicionar 10 e então 5. Esta é uma forma



de decompor uma ou as duas parcelas de maneira que obtém números iguais para realizar a soma mais facilmente. Além deste, o mais tradicional: $2000+400+50+7$ e $700+70+8$, somando: $400+700=1100$, $50+70=120$, juntando os resultados: $1100+120=1220$ e então $1220+15+2000=2235$. Neste as parcelas são decompostas em unidades, dezenas, centenas e então estas parcelas são somadas convenientemente. Mesmo que muito não conheçam por nome as propriedades das operações, elas são muito utilizadas nos cálculos que exigem um pouco mais de raciocínio, principalmente em cálculos mentais, nestes por exemplo, fez-se uso das propriedades associativa e comutativa da adição “O domínio de fatos fundamentais está em quão bem os estudantes construíram as relações numéricas e quão bem eles compreenderam as operações” (VAN DE WALLE, 2009, p 191).

As estratégias utilizadas nas operações de subtração

As estratégias utilizadas em cálculos de subtração são diversificadas também, destaco e relembro aqui alguns procedimentos mais utilizados: decomposição, complementação do número (quanto falta).

Da mesma forma como na adição, pode-se observar nas tabelas a seguir a forma de cálculos dos entrevistados: escolarizados e não escolarizados.

Operações		N1	N2	N3	N4	N5
Subtração	1500-320	Primeiro fala que daria 1220, mas depois percebe que teria de "emprestar"	Achou um pouco difícil de calcular e seguiu pelo forma do algoritmo formal: $0-0=0$,	Fala que o processo é automático mostrando que de 20 até 100 são 80 e na	Utilizando o algoritmo formal calcula apenas 500-320, iniciando o processo	Pensa no cálculo ensinado quando ia na escola, o algoritmo



IV Jornada Nacional de Educação Matemática
XVII Jornada Regional de Educação Matemática



De 06 a 09 de maio de 2012
Universidade de Passo Fundo

		Transforma 1 centena em dezenas $10-2=8$ $4-3=1$. Lembra dos resultados e fala o resultado.	$10-2=8$, "sobra 4" $4-3=1$... e 1 Dificultou na hora de lembrar os resultado.	ordem das centenas fica 1. Encontrando como resultado 1180.	pelas dezenas, transformando 1 centena em 10 unidades: $10-2=8$ e então $4-3=1$.	formal e calcula da mesma forma: $10-2=8$ e $4-3=1$, logo fala o resultado: 1180.
	763-367	Transformando 1 dezena em unidades falou que "emprestou 1" e calculou que do 7 até o 13 dá 5, dá 6. Logo passou para as dezenas $15-6=9$ (para calcular conta: 7,8,9,10,11,12,13,14,15 . "dá 9") $6-3=3$	Teve muita dificuldade e acabou não resolvendo este cálculo. Falou que conseguiria resolver escrevendo, mas "de cabeça" não consegue.	Sabendo que precisaria transformar 1 dezena em unidades realizou o cálculo: $13-7=6$ Em seguida realizou o mesmo processo para as dezenas: $15-6=9$ e na ordem das centenas: $6-3=3$. 396	Transformando 1 dezena em 10 unidades diz: "empresta 1, fica 13 e ali 5" $13-7=6$ "empresta 1 fica 15 e ali 6" $15-6=9$. Logo $6-3=3$ 396	Primeiramente resultou em 397, ai logo corrigiu falando 396. Explica que foi calculando da unidade, para a dezena para a centena, assim como no algoritmo convencional.

Tabela 3: Estratégias desenvolvidas pelos entrevistados não escolarizados nos cálculos de subtração.
Fonte: Kern (2011).

Operações	E1	E2	E3	E4	E5
-----------	----	----	----	----	----

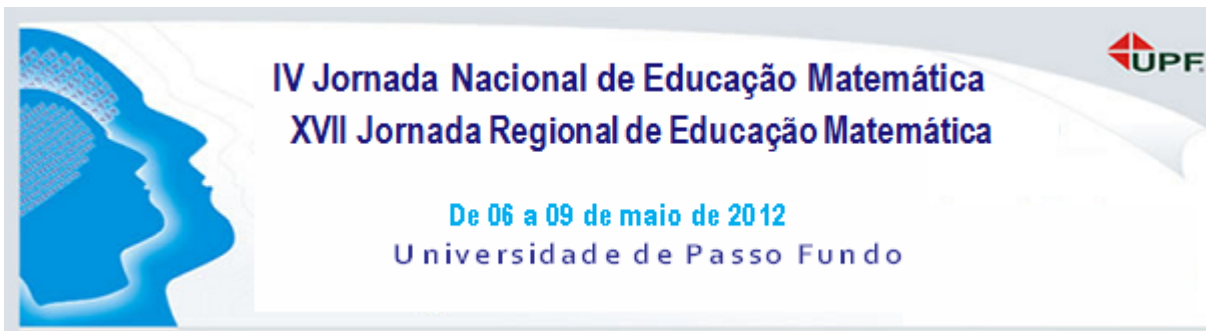


IV Jornada Nacional de Educação Matemática
XVII Jornada Regional de Educação Matemática



De 06 a 09 de maio de 2012
Universidade de Passo Fundo

Subtração	1500-320	<p>Utilizando apenas 500-320 fala que terá de “emprestar” 1 para o 0: $10-2=8$. Então ficará 4 ao invés de 5: $4-3=1$. E sabendo que no milhar não precisou mexer o resultado é: 1180</p>	<p>Pensa em quanto falta de 320 para 500. Logo desconta 32 dos 50, calculando $5-3=2$, como terá de transformar 1 centena em dezenas, ficará 1. E $10-2=8$. Logo, 1180</p>	<p>Utiliza 50-32 e calcula na forma convencional: $10-2=8$ e $4-3=1$. Estes resultado junta com o restante dos números que não precisou realizar cálculo para saber o resultado.</p>	<p>Utilizando a decomposição do números calcula da seguinte forma: 1500-300 e 1200-20 encontrando 1180 rapidamente.</p>	<p>Utilizando o complemento dos números realiza: $100-20=80$ e $400-300=100$, pois sabe que $100+400=500$, logo resulta em 1180.</p>
	763-367	<p>Novamente tendo como base o cálculo convencional: $13-7=6$ $15-6=9$ $6-3=3$</p>	<p>Pensou em quanto falta de 367 até 700 (333) e sabendo que falta 63 até 763, soma: $333+63$</p>	<p>Se baseando no cálculo aprendido na escola (algoritmo formal), calcula: $13-7=6$ $15-6=9$ $6-3=3$</p>	<p>Utilizando a complementação de unidades procede o seguinte: de 367 p/767 faltam 400, desconta 4 dos 400, pois é até 763, então são 396.</p>	<p>Empregando o algoritmo formal e a transformação de unidades conta: "empresta 1 do 6 para o 3" $13-7=6$, "como na dezena ficou 5, precisa emprestar 1 do 7" $15-6=9$, "ficou 6 na centena" 6-</p>



						3=3
--	--	--	--	--	--	-----

Tabela 4: Estratégias desenvolvidas pelos entrevistados escolarizados nos cálculos de subtração.
Fonte: Kern (2011).

Nota-se no desenvolver das estratégias que novamente a maioria dos entrevistados e principalmente os não escolarizados, fizeram uso do cálculo formal para realizar a subtração. Já no grupo dos escolarizados, além do uso do algoritmo formal, faz-se uso de estratégias como a decomposição e a complementação realizando neste uma soma para realizar a subtração, ou seja, pensando o que falta de um número para alcançar o outro de valor maior e até mesmo se apoiando em dezenas cheias e realizando depois a compensação. Segundo Parra (1996, p.189) “os procedimentos de cálculo mental se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números”.

Analisando, nota-se o uso de propriedades importantes das operações e que muitas vezes foram pensadas e descritas de formas diferenciadas uma das outras, como é o caso do uso do complemento do número: um dos entrevistados se apoiou em dezenas cheias, outro já pensou o resultado como número “redondo”. Estas são formas diferentes de se proceder numa mesma propriedade, pois são formas que os entrevistados sentem-se seguros, Quando utilizada a idéia do complemento, faz-se uso do “quanto falta”. Esta idéia da operação é uma excelente estratégia, pois ao realizar a subtração estará utilizando uma adição, sendo que esta última é sempre considerada mais prática de resolver.

Em sala de aula, da mesma forma, perceber como o aluno realiza o procedimento de cálculo e mostrar, argumentar e expor para os demais é uma forma de instigar os alunos a experimentarem e obterem para si formas próprias e apropriadas de desenvolvimento dos diversos cálculos.

Considerações finais



A partir da análise das entrevistas nota-se uma diversidade nos procedimentos utilizados no desenvolvimento dos cálculos. O procedimento mais utilizado, principalmente por sujeitos não escolarizados é o algoritmo formal.

Os algoritmos tradicionais são estratégias inteligentes para computar que foram desenvolvidas ao longo do tempo. Cada um está baseado em executar a operação em um valor posicional de cada vez com transições para uma posição adjacente (trocar, reagrupar, “emprestar” ou “levar”). Os algoritmos tradicionais tendem a fazer com que pensemos em termos dos algarismos em vez do número composto que os algarismos compõem. Esses algoritmos funcionam para todos os números, mas geralmente estão longe de serem os métodos mais eficientes ou úteis de calcular (VAN DE WALLE, 2009, p.244).

Este procedimento é o mais utilizado porque foi o que aprenderam na escola. Para muitos deles foi o único procedimento aprendido, outros que talvez já fazem maior uso do cálculo no dia-a-dia e então para facilitar e agilizar o cálculo já tem algumas estratégias formadas e que tomam como base propriedades importantes da adição e subtração.

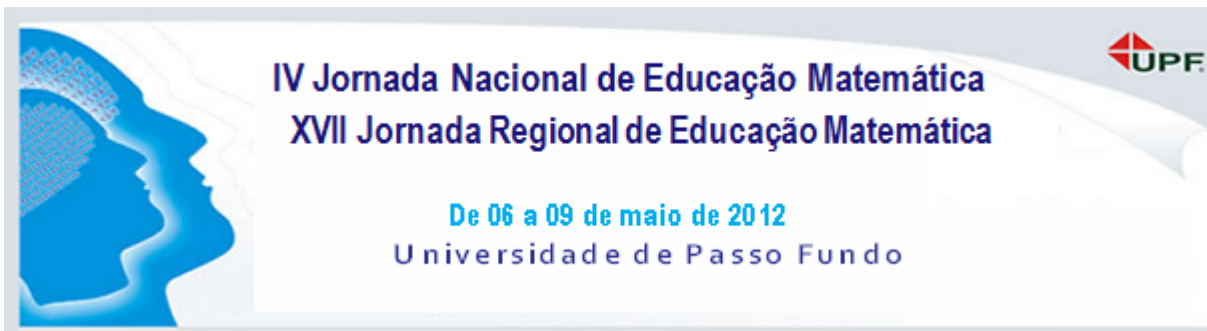
Segundo Lopes,

Para muitos professores o ensino da Aritmética reduz-se ao ensino dos passos dos algoritmos. Não há dúvida de que é mais simples ensinar regras fechadas do que desenvolver idéias, o sentido numérico e explorar os vários significados das operações (2009, p.67).

O incentivo ao uso da memória é um ponto importante do cálculo mental e é por isso da importância do uso, incentivo e ensino de procedimentos diferentes em sala de aula. Se desenvolvido e motivado formas diferenciadas de desenvolvimento de um mesmo problema os alunos escolherão a forma que melhor entenderam e a partir deste desenvolverão seus próprios procedimentos para resolução de outros cálculos.

O cálculo mental, para ser tratado/considerado nas aulas de matemática, pede o desenvolvimento de procedimentos, a criação e o estabelecimento de estratégias e combinações de ações. Com estes passos em sala de aula faz-se o uso das diferentes propriedades das operações e desenvolvendo e tornando a matemática um campo de saber mais atrativo e usual no dia-a-dia.

Referências



KERN, Cristiane Raquel. *A utilização do cálculo mental no dia-a-dia das pessoas – um estudo exploratório*. Componente Curricular Prática de Ensino s/f de Estágio Supervisionado V: Trabalho de Sistematização de Curso em Matemática, do curso de Matemática – Licenciatura

LOPES, Antonio José; RODRIGUES, Joaquim Gimenez. *Metodologia para o ensino da aritmética: competência numérica no cotidiano*. Volume único: livro do professor. São Paulo, FTD, 2009.

MORES, Mari Estela T; CAETANO, Joyce Jaqueline. *O cálculo mental e suas contribuições para a resolução de problemas*. Revista Eletrônica Lato Sensu. Ano 3, nº1, março de 2008. Disponível em: <http://www.unicentro.br> – Ciências Humanas. Acesso em: mar. de 2011.

PARRA, Cecília. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, Cecília;SAIZ, Irma. *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.

VAN DE WALLE, John A. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. Porto Alegre, Artmed, 2009.