



## ÁRVORES FRACTAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL E NA ARQUITETURA

Tânia Baier<sup>1</sup>  
Maycon Ricardo Sedrez<sup>2</sup>  
Eliana Einsfeld Krindges<sup>3</sup>

### Resumo

O estudo dos objetos geométricos, na educação básica, está focado nas criações realizadas na antiga Grécia, berço da civilização ocidental. Essa geometria, atualmente conhecida como euclidiana, fundamentou a organização de diversas áreas do conhecimento científico europeu. Apesar de terem sido criadas geometrias não-euclidianas, na educação básica ainda predomina o entendimento de que a geometria euclidiana é a única forma de conceber o espaço. Objetivando mostrar a possibilidade de estudar temas da matemática contemporânea no ensino fundamental, alinhando com conteúdos que compõem o tradicional currículo da matemática, neste artigo são apresentadas algumas características da *geometria fractal*. São enfocadas as *árvores fractais*, descritas as regras de sua construção, sendo relatadas as atividades realizadas por estudantes de oitavo ano do ensino fundamental. São apresentadas obras arquitetônicas fundamentadas na ideia de *fractais* e sua apreciação atrai o interesse dos estudantes para o estudo da matemática, principalmente pelo aspecto estético e por revelarem as aplicações dessa ciência na atualidade. Os conteúdos matemáticos envolvidos, tais como segmentos de reta, ângulos, sequência numérica, potência e generalização algébrica, possibilitam ao professor determinar em que momento tais temas podem ser abordados em suas aulas.

**Palavras-chave:** Geometria fractal. Educação matemática. Arquitetura Fractal.

### Introdução

A escolha dos conteúdos matemáticos que constituem o currículo da educação escolar privilegia as criações da civilização ocidental europeia, onde ocorreu o

---

<sup>1</sup> Universidade Regional de Blumenau – professora do Departamento de Matemática – doutora em Educação Matemática (UNESP) – taniabaier@gmail.com

<sup>2</sup> Universidade Estadual de Campinas – arquiteto – doutorando em Arquitetura, Tecnologia e Cidade – mayconsedrez@gmail.com

<sup>3</sup> Escola Barão do Rio Branco – mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – elianaeinsfeld@hotmail.com

desenvolvimento da ciência moderna, desde a época de Galileu Galilei, fundamentada nos conceitos elaborados pelas antigas culturas mediterrâneas. A geometria da antiga Grécia foi entendida como sendo a única possível e tal entendimento se perpetua nas escolas básicas, apesar de terem sido criadas geometrias não-euclidianas. A maior parte do material de apoio didático usado pelos professores apenas contempla o estudo dos objetos geométricos clássicos: quadrados, cubos, triângulos, esferas e demais elaborações dos primeiros geômetras. Seu estudo, na educação básica, se limita às descrições dos elementos e ao cálculo de perímetros, áreas, volumes.

Pesquisadores da área da educação matemática apontam as dificuldades encontradas, na vivência pedagógica, quando são excessivamente focados algoritmos destituídos de significado para os estudantes, quando o estudo da matemática se reduz à manipulação de fórmulas sem sentido. Diante da recorrente indagação acerca da aplicabilidade de um determinado conteúdo matemático, constata-se a fraqueza do argumento normalmente utilizado por professores de que a utilidade prática um dia será conhecida, em cursos mais avançados. D'Ambrosio (1996, p.32) explicita: “O grande desafio é desenvolver um programa dinâmico, apresentando a ciência de hoje relacionada a problemas de hoje e ao interesse dos alunos.” (D'AMBROSIO, 1996, p. 32).

Esse autor aponta algumas disciplinas em processo de desenvolvimento que podem ser abordadas no ensino da matemática, de modo que, desde a educação básica, estejam incorporados nos currículos escolares tópicos da matemática criada no século XX. Constatando que, no cenário mundial, muitos conteúdos matemáticos contemporâneos estão sendo estudados na educação escolar

pode-se prever que na matemática do futuro serão importantes o que hoje se chama [...] fractais [...] Os problemas tratados são mais interessantes, a visualização é no estilo moderno, parecido com o que se vê em TV e nos computadores. O mais importante é destacar que toda essa matemática é acessível até no nível primário. (D'AMBROSIO, 1996, p. 59)

Uma das áreas de abrangência da matemática contemporânea que exerce atração pelo seu visual fascinante é a *geometria fractal*, aplicada em diversos ramos da ciência, na elaboração de jogos computacionais, em espetáculos de música eletrônica e na indústria cinematográfica. A palavra latina *fractal* foi escolhida por Benoit Mandelbrot para denominar os objetos geométricos que apresenta no seu livro *Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão*.

A noção que lhe serve de fio condutor será designada por um de dois neologismos equivalentes, <<objecto fractal>> ou <<fractal>>, termos que formei, pela necessidade que me surgiu com este livro, a partir do adjectivo latino *fractus*, que significa <<irregular>> ou <<quebrado>>. (MANDELBROT, 1998, p. 13, grifos do autor)

Alguns *fractais* são construídos a partir de objetos geométricos estudados na educação básica, tais como segmentos de reta, triângulos e quadrados. Outros são construídos por meio de programas computacionais com a utilização de dezenas de cores, apresentam uma movimentação com forte apelo estético e, numa visão superficial, não aparentam possuir ligação com os conteúdos matemáticos que constituem os currículos escolares. “Porém, uma leitura mais cuidadosa revela que a construção desses objetos envolve conceitos matemáticos estudados desde o Ensino Básico.” (BAIER, 2005, p. 12).

Na educação escolar, as áreas da matemática podem ser estudadas em momentos distintos, ora priorizando conteúdos algébricos, ora focando a geometria. Para Leivas (2009, p.55) a abordagem da *geometria fractal* possibilita o estabelecimento de ligações: “O fractal, objeto de uma nova Geometria, pode representar mais uma relação entre Álgebra e Geometria, desenvolvendo habilidades algébricas e visuais [...]”

No presente trabalho inicialmente são apresentadas algumas características dos *objetos fractais*. Em seguida, são enfocadas as *árvores fractais*, evidenciando a possibilidade de relacionar tópicos da *geometria fractal* com os conteúdos já existentes no currículo escolar. É relatada a aplicação dessa atividade com estudantes dos anos finais do ensino fundamental.

Considerando que em diversas atividades humanas é especialmente demandado o pensamento geométrico, torna-se importante, na educação escolar, o estudo de diferentes geometrias. A aquisição de uma gramática de formas é essencial na atividade de arquitetos, *designers*, projetistas de produtos, artistas plásticos. Os arquitetos contemporâneos perceberam que é possível relacionar a *geometria fractal* com arquitetura, sendo entendida “como uma ferramenta potencial para o estudo de sistemas generativos de formas no projeto de arquitetura.” (SEDREZ, 2009, p.13).

### **Geometrias: euclidiana e fractal**

As origens da geometria se encontram nos primórdios da história da humanidade e diversas hipóteses são elaboradas:

Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lares é que tinha conduzido ao estudo da geometria. (BOYER, 1996, p. 4)

Pesquisas arqueológicas têm revelado decorações geométricas em diversos objetos utilitários, tais como vasos em cerâmica e peças de vestuário. Na história da arquitetura observa-se a importância da ornamentação e da decoração, que em geral utilizam padrões de formas geométricas, por exemplo, nos pisos, nas paredes e na forma da própria edificação. Assim, “o desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem.” (BOYER, 1996, p.5).

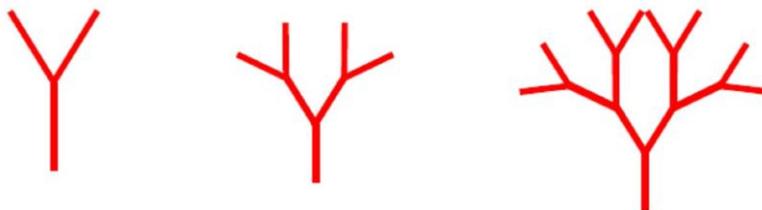
As criações geométricas dos antigos gregos foram organizadas, na obra intitulada *Os Elementos*, por Euclides, que nasceu por volta de 325 a.C. e faleceu, aproximadamente, em 265 a.C., em Alexandria, no Egito. Exerceu forte influência na elaboração da matemática e de suas aplicações na cultura europeia. As formas da geometria euclidiana predominam na paisagem arquitetônica das cidades ocidentais, predominando as formas inspiradas em prismas.

Nos últimos séculos foram criados os objetos hoje conhecidos como *fractais*, os quais possuem, dentre outras, a propriedade de serem autossimilares, ou seja, suas partes representam cópias de si mesmo em escalas menores. Mandelbrot (1998, p. 171) esclarece que o significado dos objetos *fractais* é intuitivo, que são figuras geométricas ou objetos da natureza que combinam características como:

[...] a) As suas partes têm a mesma forma ou estrutura que o todo, estando porém a uma escala diferente e podendo estar um pouco deformadas. b) A sua forma é ou extremamente irregular ou extremamente interrompida ou fragmentada, assim como todo o resto, qualquer que seja a escala de observação [...]

Na natureza são encontradas árvores que apresentam crescimento com padrão *fractal*. Do tronco principal emergem as ramificações iniciais, todas formando ângulos com, aproximadamente, a mesma medida. De forma similar às primeiras ramificações, cada novo ramo sofre ramificações que repetem a estrutura inicial até as ramificações terminais onde surgem as folhas. Como exemplo, na *Tabebuia avellanadae*, popularmente chamada de ipê roxo, pode-se observar que seu crescimento parte de um tronco que origina dois ramos, os quais se dividem em outros dois e, assim

sucessivamente. Na figura abaixo está apresentada uma construção geométrica, realizada usando o software Geogebra, que representa o padrão *fractal* de um ipê roxo:



**Fig. 01: Árvore fractal construída com Geogebra**

Manualmente, pode ser construída uma *árvore fractal* com a utilização de régua e transferidor, seguindo as seguintes regras:

- (1) desenhar um segmento de reta vertical com oito centímetros;
- (2) fazer uma bifurcação central, de ângulo igual a sessenta graus, cujos lados medem a metade do segmento anterior;
- (3) em cada um dos dois segmentos, repetir o procedimento (2).

Esta atividade foi aplicada com oitenta estudantes do oitavo ano, sendo quarenta de uma escola da rede particular localizada na cidade de Blumenau/SC e quarenta de uma escola pública do município de Feliz/RS. Foi realizada com entusiasmo apesar de muitos estudantes apresentarem dificuldade no manuseio do transferidor.

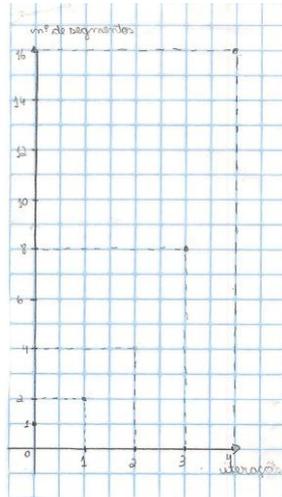
Durante o processo de construção da *árvore fractal* ambos os professores orientaram por meio de questionamentos: Quantos segmentos foram construídos na segunda iteração? Qual é a razão entre os segmentos da primeira e segunda iteração? Quantos segmentos foram construídos na segunda iteração? Essas informações foram organizadas pelos estudantes em forma de uma tabela. A seguir encontra-se a atividade completada corretamente por um dos estudantes:

Iteração	Quantidade de segmentos	Quantidade de segmentos na forma de potência
0	1	$2^0$
1	2	$2^1$
2	4	$2^2$
3	8	$2^3$
4	16	$2^4$
...		
n		$2^n$

**Fig. 02: Cálculo da quantidade de segmentos da *árvore fractal***

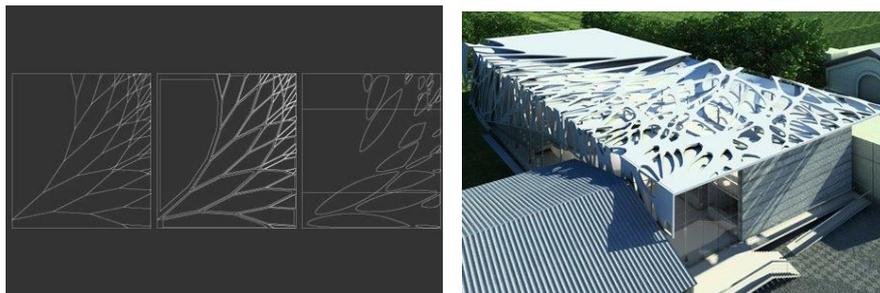
Constatou-se que esta atividade é adequada para o entendimento de potências, não havendo dificuldade na elaboração do registro da quantidade de segmentos na forma de potência. No entanto, raros estudantes lograram êxito na escrita da

generalização  $2^n$ . Os dados desta tabela foram representados graficamente. Segue a atividade realizada de modo correto por um dos estudantes:



**Fig. 03: Gráfico – 4 iterações**

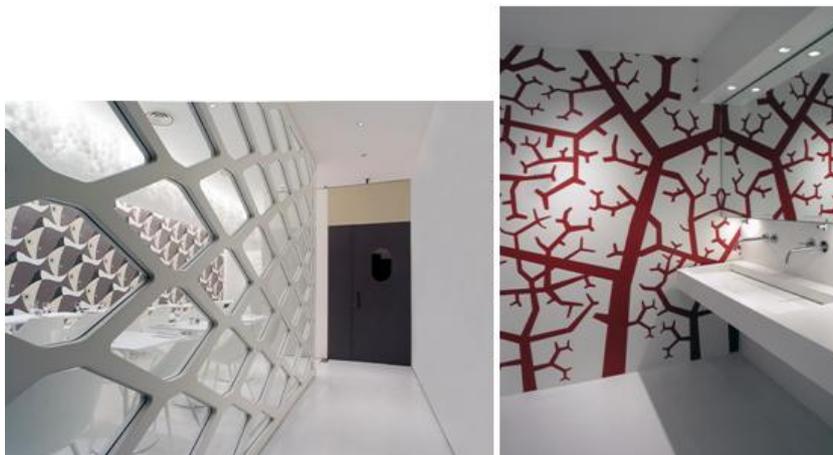
*Árvores fractais* inspiraram os arquitetos do escritório Serero na concepção do auditório Saint Cyprien, na França, conforme pode ser observado nas figuras abaixo. O projeto inicia com experimentações de diferentes ângulos, chegando a uma estrutura vazada que propicia um jogo de luz e sombra nos locais onde a cobertura é transparente, ocorrendo um sistema de ventilação passiva. “As maneiras de utilizar a Geometria Fractal na arquitetura e no *design* são múltiplas. A adição e subtração de elementos é um processo morfológico muito utilizado pelos projetistas que incorporam no trabalho os fractais.” (SEDREZ, 2008, p. 61).



**Fig. 04 e 05: Auditório Saint Cyprien**  
Fonte: SERERO, 2012

Projetado por Pierluigi Piu, o restaurante Olivomare, especializado em frutos do mar, apresenta nos seus diversos ambientes ligações com paisagens marítimas. Divisórias de vidro, esbranquiçadas, lembram redes de pesca, luminárias tubulares remetem para anêmonas, relevos ondulados nas paredes evocam areia molhada pelas ondas. Em síntese, sob todos os pontos de vista, a presença constante da geometria da

natureza enfocando o mar. Um dos elementos decorativos, relacionado com o conceito *árvores fractais* consiste em representações dos intrincados ramos dos corais.



Fonte: Piu, 2012

Localizado em Mundai, na Índia, a sala para banquetes chamada de Tote foi projetada por Serie Architects em 2007. O complexo faz parte de uma renovação de um conjunto de edificações e conta com a sala de jantar, a recepção, um restaurante e um bar. O projeto inspirado nas árvores utiliza colunas com perfil de secção I, e tenta misturar o interior do salão com as áreas externas.



**Fig. 07: Restaurante Tote**  
Fonte: PETIT, 2009

### Considerações finais

O tema *árvores fractais* pode ser abordado na educação básica focando conteúdos geométricos e algébricos tradicionalmente incorporados no currículo da matemática. O estudo da *geometria fractal* possibilita uma visão da matemática criada na década de 1970, revelando se tratar de uma área em contínuo processo de criação. O prazer estético proporcionado pelo conhecimento de obras arquitetônicas fundamentadas na *geometria fractal* desperta o interesse dos estudantes para o estudo da

matemática. O entanto, a realização de atividades pelos estudantes do ano do ensino fundamental apontou dificuldades no uso do transferidor e na busca pela generalização algébrica do processo iterativo.

Espera-se que este trabalho contribua para o estudo da matemática de uma maneira dinâmica e atual, evidenciando sua aplicação em outras áreas do conhecimento humano. A incorporação do tema *árvores fractais*, em aulas de matemática, pode se dar em diversos momentos, pois são diversos os conteúdos matemáticos relacionados, tais como segmentos de reta, ângulos, sequência numérica, potência e generalização algébrica.

### Referências

BAIER, T. *O nexó “Geometria Fractal – produção da ciência contemporânea” tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico*. (Tese: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

D’AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática: da Teoria à Prática*. 4. ed. Campinas: Papirus, 1996.

LEIVAS, J. C. P. *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em matemática*. (Tese: Programa de Pós-graduação do Setor de Educação na área temática Educação, Cultura e Tecnologia). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

MANDELBROT, B. B. *Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão*. Lisboa: Gradiva, 1991.

PETIT, F. *Projeto Tote*. 2009. Disponível em: <<http://www.serie.co.uk/HTML%20Files/Project/Serie%20deGustibus02.html>> Acesso em 31/01/2012.

PIU, P. *Projeto Olivomare*. 2007. Disponível em <[http://www.pierluigipiu.it/web/projects\\_olivomare.htm](http://www.pierluigipiu.it/web/projects_olivomare.htm)> Acesso em 31/01/2012.

SEDREZ, M. R. *Forma Fractal no ensino de projeto arquitetônico assistido por computador*. (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Arquitetura e Urbanismo). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

SERERO. *Projeto Auditório Saint Cyprien*. 2007. Disponível em: <<http://www.serero.com>> Acesso em 21/02/2012.